Справедливе співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Якщо похідну беруть двічі по одній і тій же змінній, то її позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Повний диференціал

Розглянемо $u = f(x, y, z)$ – функцію трьох незалежних змінних, яка є визначеною і диференційованою у деякому інтервалі.

Головна, лінійна відносно Δx, Δy, Δz, частина приросту функції називається **повним диференціалом** du функції трьох змінних:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Інакше кажучи, повний диференціал функції дорівнює сумі її частинних диференціалів.

Тема 2. Основи інтегрального числення	• Невизначений і визначений інтеграли. • Інтегрування методом заміни змінної та частинами.

Первісна та невизначений інтеграл

Задача інтегрального числення полягає в знаходженні функції $F(x)$ за її похідною $F'(x) = f(x)$ чи за її диференціалом $f(x)dx$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** чи інтегралом для даної функції $f(x)$, якщо для всіх x з області визначення функції виконуються рівності $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$ має безмежну кількість первісних, що відрізняються тільки на сталу величину C. Тому, якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то будь–яка інша може бути представлена виразом $F(x) + C$.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$.

Символ невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$. Згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $\int$ – знак інтегралу, x – змінна інтегрування.

Обчислення інтегралу від заданої функції називається інтегруванням даної функції.

Таблиця деяких невизначених інтегралів

1.	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$\int dx = x + c$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c, \quad x \neq 0$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

6.	$\int e^x dx = e^x + c$
7.	$\int \sin dx = -\cos x + c$
8.	$\int \cos x dx = \sin x + c$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c, \; x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$
11.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c$
12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c, \quad -1 < x < 1$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
15.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + c, \; \|x\| \neq a, \, a \neq 0$
16.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x+a}{x-a} \right\| + c, \; \|x\| \neq a, \, a \neq 0$
17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right\| + c, \; \|x\| > \sqrt{\|k\|}$

Означення визначеного інтеграла

Нехай у функції $f(x)$, яка визначена на деякому проміжку X, існує в цьому проміжку X невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in X, \quad C = const.$$

Нехай a і b – дві довільні точки, що належать проміжку X. Різниця $F(b) - F(a)$ представляє собою приріст первісної $F(x)$ при переході з точки a в точку b.

Приріст $F(b) - F(a)$ довільної первісної $F(x)$ функції $f(x)$ при зміні аргументу x від значення a до значення b називають **визначеним інтегралом** з границями інтегрування a и b, що позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx$$

Задача обчислення визначеного інтеграла зводиться до знаходження первісної (тобто невизначеного інтеграла), після чого потрібно обчислити значення первісної при $x = b$ і $x = a$ та знайти різницю цих значень:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Цей вираз називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Властивості визначеного інтеграла

1. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від доданків:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Якщо відрізок інтегрування $[a,b]$ розбитий на дві частини $[a,c]$ і $[c,b]$, так що $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. **Теорема про середнє**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то у межах $[a,b]$ існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Геометричний зміст цієї теореми: **площу криволінійної трапеції** можна виразити через площу прямокутника з тією ж основою, що й трапеція, і стороною, яка дорівнює значенню підінтегральної функції при деякому проміжному значенні аргументу.

5. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Цю властивість легко зрозуміти, якщо скористатись теоремою про середнє та взяти до уваги, що $(b-a)=-(a-b)$.

Крім цього можна навести інші властивості визначеного інтегралу:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$

2. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$, якщо $f(-x)=-f(x)$

3. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\cdot\int\limits_0^a f(x)dx$, якщо $f(-x)=f(x)$

4. Якщо $f(x)\geq 0$ всюди на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$

5. Якщо $f(x)\leq g(x)$ всюди на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b g(x)dx$.

6. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq\int\limits_a^b |f(x)|dx$

7. Якщо M і m – максимальне та мінімальне значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, то

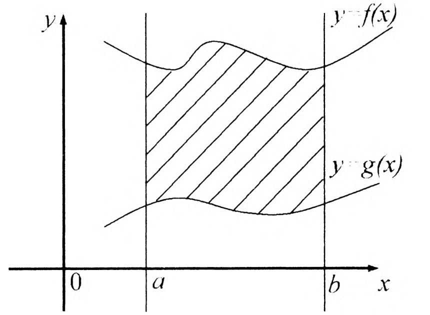
$$m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$

Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об'ємів

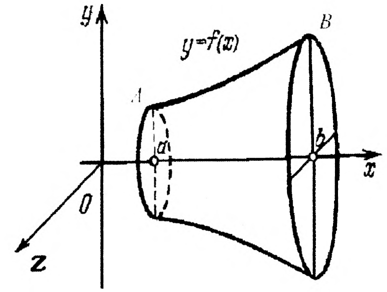
Якщо, наприклад, є дві функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$, які неперервні на інтервалі $[a,b]$, то **обчислення площі** S плоскої фігури, обмеженої зверху графіком функції $y=f(x)$, а знизу - графіком функції $y=g(x)$, зліва - прямою $x=a$, справа - прямою $x=b$ може бути проведене за формулою:

$$S=\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx-\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В даному випадку це означає, що площу плоскої фігури можна обчислити як різницю площ двох криволінійних трапецій, утворених відповідно двома функціями $y=f(x)$ і $y=g(x)$.



Якщо, наприклад, є функція $y=f(x)$, яка неперервні на інтервалі $[a,b]$, і утворена нею криволінійна трапеція $aABb$ обертається навколо вісі OX утворюючи об'ємне тіло обертання, то **обчислення об'єму** V цього тіла можна провести наступним чином:



(а) визначаємо, що поперечний перетин цього тіла (в довільній точці x) площиною, яка перпендикулярна до осі Ox, є коло, радіус R якого дорівнює значенню функції $f(x)$ в точці x;

(б) з цього випливає, що площа $S(x)$ поперечного перерізу визначається виразом

$$S(x)=\pi R^2=\pi(f(x))^2;$$

(в) знаючи площі поперечних перетинів $S(x)$, можна знайти об'єм тіло обертання за формулою

$$V=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2dx.$$

Основні методи інтегрування

1. **Безпосереднє інтегрування** – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць без додаткових перетворень.
2. **Метод розкладання**. Метод базується на розкладанні підінтегральної функції на суму функцій, кожна з яких є табличною.
3. **Інтегрування підстановкою (заміна змінної)**.

Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ робиться заміна змінної $x = f(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x. Диференціал $dx = f'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл переписується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко береться.
4. **Інтегрування частинами**. Розглянемо дві неперервні (диференційовані) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Утворимо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Звідси

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Таким чином, інтеграл $\int udv$ зводиться до інтеграла $\int vdu$, який часто береться більш просто.

Тема 3. Поняття про диференціальні рівняння	• Диференціальні рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються. • Лінійні, однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами. • Методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Поняття про диференціальні рівняння

Диференціальним називається рівняння, в яке, крім функції y і незалежної змінної x, входять похідні функції y', y'', ..., $y^{(n)}$ (або диференціали dx і dy). Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ або } F_2(x, y, dx, dy) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають **порядком** диференціального рівняння.
Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо невідома функція y та її похідні y', y'', ... входять у рівняння тільки в першому ступені. В іншому випадку – рівняння нелінійне.
Розв'язком звичайного диференціального рівняння n-го порядку називається кожна функція $y = f(x)$, підстановка якої, разом з її похідними, перетворює його в тотожність. Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння.
У випадку функції однієї змінної ($y = f(x)$) рівняння називають **звичайним** диференціальним рівнянням. У випадку двох ($y = f(x_1, x_2)$) і більше змінних рівняння називають диференціальним рівнянням **в частинних похідних**.

Лінійні диференціальні рівняння

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y = b(x),$$

де y – шукана функція, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$ – відомі функції незалежної змінної, їх ще називають коефіцієнтами диференціального рівняння. Якщо коефіцієнти при невідомій функції y та її похідних не залежать від x, тобто є константами, то рівняння називається диференціальним рівнянням з **постійними**